Tamanho da amostra para Estudos de Capacidade

(http://www.statistical.com.br/artigos.asp)

Carlos H. Domenech e Luís G. do Amaral Vinha

Em 50 palavras ou menos

- Os índices de capacidade são utilizados para medir se o processo satisfaz as especificações do cliente, mas como se tratam de estimativas baseadas em amostras, apresentam incerteza.
- Resulta fundamental a determinação do tamanho de amostra e cálculo dos intervalos de confiança.

Histo DOE está iniciando a fase Medir de um projeto Seis Sigma. Ele aprendeu que, na fase M (Medição) do ciclo DMAIC, deve coletar informação de algumas variáveis de saída para medir o desempenho do processo. No fim do projeto (fase C do Controle) deve calcular novamente o desempenho para verificar se a meta do projeto foi atingida. Como ele é um Black Belt, sabe que a medição do desempenho é um dos conceitos chaves do Seis Sigma. O próprio nome Sigma da estratégia de melhoria é um índice da capacidade: um processo é Seis Sigma quando há 6 desvios-padrão entre o alvo e os limites de especificação. Na Figura 1 observa-se que quando um processo é Seis Sigma, o Cp = 2.

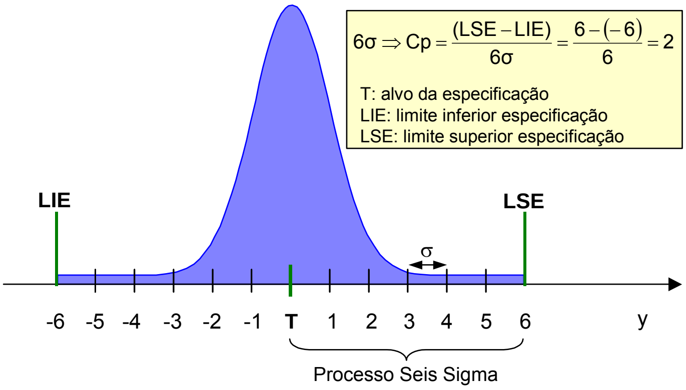

Figura 1 – Um processo Seis Sigma tem Cp = 2

Quando Histo DOE estava reunido com sua equipe, Nasco, um técnico do processo, chegou feliz e comentou ao grupo:

Nasco: "*Pessoal, podem esquecer o projeto, vocês estão trabalhando no processo errado. Calculei o Cp do processo e obtive um valor igual a 1,38, ou seja, nível Sigma = 4,1 (= 1,38 x 3). Não é um processo tão ruim assim!*"

Histo DOE: "*Calma Nasco, me esclarece uma coisa: qual é o tamanho de amostra que você utilizou para fazer o cálculo?*"

Nasco: "*Lá vem você de novo! Está bem, não usei n = 30 como manda o figurino, usei n = 12...*"

Histo DOE tem verificado em diversas oportunidades a utilização de um número reduzido de amostras para calcular índices de capacidade para medir o desempenho dos processos. Histo DOE fez a simulação da Figura 2 para mostrar a variabilidade dos índices calculados com tamanho de amostra de 12 observações. Coletou 41 666 amostras com n = 12 de um processo estável com desvio padrão igual a 1.

Considerando uma largura de especificação igual a 6, o **Cp teórico** deste processo é:

$$Cp = \frac{26 - 20}{6 \bullet 1} = 1$$

Na Figura 3, Histo DOE fez um histograma com os Cp das 41 666 amostras. De posse desta informação comentou com Nasco: "*Você entendeu? Mesmo para um processo com Cp = 1, amostras pequenas podem produzir valores de Cp que variam muito*". Nasco entendeu a explicação e perguntou como podia prever a largura do intervalo em função do tamanho da amostra. Vejamos como ajudá-lo!

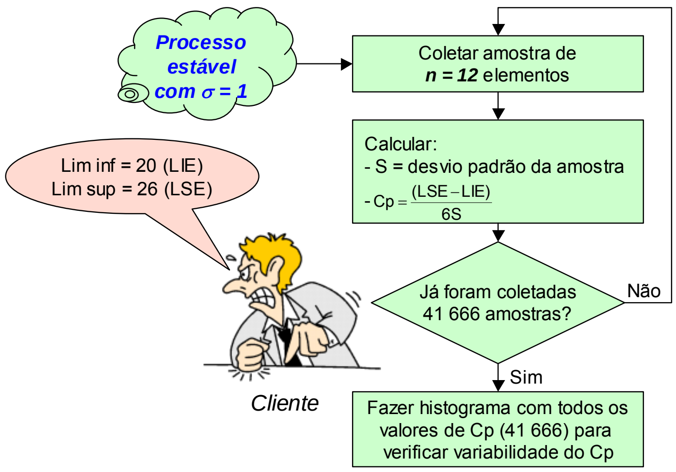

Figura 2 – Simulação de um processo com Cp teórico = 1

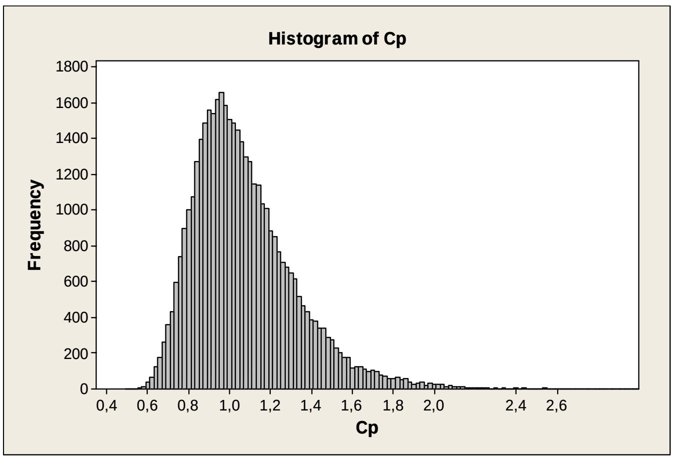

Figura 3 – Variação do Cp em amostras de tamanho n = 12 (Cp teórico = 1)

Cálculo de tamanho de amostra e intervalos de confiança para Cp e Cpk

Os índices de capacidade são amplamente utilizados para expressar o quanto o processo satisfaz as especificações do produto ou do cliente, mas como se tratam de estimativas baseadas em amostras, apresentam incerteza. A estatística pode ajudar no estudo desta incerteza. Serão apresentados dois resultados que podem auxiliar aos **Black Belts** e **Green Belts** nos estudos de capacidade usando os índices Cp e Cpk:

- determinação do tamanho da amostra necessário para se obter uma certa precisão,
- cálculo dos intervalos de confiança.

Os índices Cp e Cpk são calculados a partir das equações:

$$Cp = \frac{LSE - LIE}{6S} \qquad Cpk = mínimo\left\{\frac{LSE - \bar{y}}{3S}; \frac{\bar{y} - LIE}{3S}\right\} \qquad S = \sqrt{\frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n-1}}$$

LIE: limite inferior de especificação
LSE: limite superior de especificação
S: desvio padrão do processo e $\bar{y}$: média do processo

A partir das fórmulas anteriores, percebe-se que estes índices relacionam a especificação do produto (numerador) com o desempenho do processo (denominador). O Cp é denominado "capacidade potencial" porque considera apenas a dispersão dos dados e não a posição do processo em relação ao alvo da especificação. O Cpk considera também a posição do processo em relação ao alvo, sendo sempre menor ou igual ao Cp e quanto maior a distância da média em relação ao alvo menor será seu valor.
As equações de Cp e Cpk apresentadas neste artigo são equivalentes aos índices denominados Pp e Ppk no software Minitab.

Lembre-se de que para fazermos previsões a partir desses índices, o processo deve ser estável (sob controle) e sua distribuição deve ser aproximadamente normal. Além disso, é importante ressaltar que as amostras utilizadas devem representar de forma adequada a variação do processo, ou seja, não se deve coletar muitas amostras somente de um lote ou em um curto espaço de tempo.

São apresentadas a seguir as equações para o cálculo do número mínimo requerido de amostras (n) e para o cálculo do intervalo de confiança dos índices Cp e Cpk.

Tamanho de amostra para estimar Cp e Cpk

Calcula-se o tamanho de amostra quando o estudo de capacidade ainda não foi realizado e deseja-se planejá-lo para atingir uma certa precisão. As equações para o cálculo do tamanho de amostra estão no quadro abaixo:

$$Cp \quad \Rightarrow \quad n \cong 1 + 0{,}5\left(\frac{Z_{\alpha/2}Cp}{Cp - Cp_{min}}\right)^2 \qquad \textbf{(1)}$$

$$Cpk \quad \Rightarrow \quad n \cong \left(\frac{1}{9Cpk^2} + 0{,}5\right)\left(\frac{Z_{\alpha/2}Cpk}{Cpk - Cpk_{min}}\right)^2 \qquad \textbf{(2)}$$

- $Z_{\alpha/2}$ é o quantil de ordem $\alpha/2$ da distribuição normal padrão (ex.: se α = 0,05, $Z_{\alpha/2}$ = 1,96).
- $Cp\text{-}Cp_{min}$ é a diferença desejada entre o valor de Cp e o seu valor mínimo com (1- α)% de confiança.
- $Cpk\text{-}Cpk_{min}$ é a diferença desejada entre o valor de Cpk e o seu valor mínimo com (1- α)% de confiança.

Observações:

a) As fórmulas acima e os intervalos de confiança foram implementados na planilha de trabalho http://www.statistical.com.br/admin/arquivos/IC_CpCpk.xls.
b) Pelas fórmulas (1) e (2) observa-se que quanto maior o valor de Cp ou Cpk, maior será o tamanho de amostra necessário para se conseguir um certo erro. O erro na estimativa de Cp é dado por ($Cp – Cp_{min}$) e o erro na estimativa de Cpk, por ($Cpk – Cpk_{min}$).
c) Nasco viu as fórmulas acima e ficou perplexo. Seu comentário foi: "*Quero encontrar o tamanho de amostra para estimar Cp, e você me dá uma fórmula de n na qual devo entrar com Cp!...*" Histo DOE respondeu: "*Embora você desconheça o valor de Cp, deveria tentar acertar (chutar) o maior valor que acredita, pode representar a capacidade do seu processo*".

Exemplo 1: Estamos interessados em estudar a capacidade de um processo e não sabemos qual é o tamanho da amostra que devemos coletar. Sabemos, por estudos anteriores, que o Cp não deve ser superior a 1 e gostaríamos de cometer um erro de no máximo 0,15 na estimativa ($Cp - Cp_{min}$). Utilizando a fórmula (1) ou a planilha IC_CpCpk.xls pode-se calcular o número de amostras para esta situação:

$$n \cong 1 + 0{,}5\left(\frac{1{,}96 \bullet 1}{0{,}15}\right)^2 = 86$$

O tamanho de amostra calculado é bem superior ao número mágico n = 30 mencionado por Nasco.

Estimação de Cp e Cpk com intervalo de confiança

Com o experimento de simulação feito na Figura 2 (histograma da Figura 3) ficou comprovado que diversas amostras do mesmo processo podem gerar valores bem diferentes de Cp. Nesta seção apresentam-se fórmulas para calcular os intervalos de confiança para Cp e Cpk. Espera-se que estes intervalos contenham o verdadeiro valor com um certo nível de confiança, por exemplo 95%. Ou seja, uma vez que a amostra já foi coletada pode-se calcular o intervalo de confiança para o verdadeiro valor de Cp ou Cpk. Este intervalo de confiança pode também ser utilizado para testar se o índice encontrado corresponde ao padrão exigido pela empresa. As equações para o cálculo dos limites do intervalo de confiança estão no quadro abaixo:

$$Cp \quad \Rightarrow \quad \text{Lim inf;Lim sup} = \left[Cp\sqrt{\frac{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}{n-1}} ; Cp\sqrt{\frac{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}{n-1}} \right] \qquad \textbf{(3)}$$

$$Cpk \quad \Rightarrow \quad \text{Lim inf;Lim sup} = \left[Cpk - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{9n} + \frac{Cpk^2}{2n-2}} ; Cpk + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{9n} + \frac{Cpk^2}{2n-2}} \right] \qquad \textbf{(4)}$$

- $Z_{\alpha/2}$ é o quantil de ordem $\alpha/2$ da distribuição normal padrão (ex.: se $\alpha = 0{,}05$, $Z_{\alpha/2} = 1{,}96$).
- $\chi^2_{n-1,\alpha/2}$ é o quantil de ordem $\alpha/2$ da distribuição qui-quadrado com n-1 graus de liberdade (ex.: se n = 5, $\alpha = 0{,}05$, $\chi^2_{n-1,\alpha/2} = 0{,}484$ e $\chi^2_{n-1,1-\alpha/2} = 11{,}143$)

Observações:

a) Pelas fórmulas dos intervalos de confiança pode-se notar que quanto maior o tamanho de amostra, mais preciso será o intervalo de confiança (menor a incerteza na estimação de Cp ou Cpk). Veja planilha de trabalho em http://www.statistical.com.br/admin/arquivos/IC_CpCpk.xls.
b) Os limites dos intervalos podem ser calculados também usando o software Minitab. Você deve acessar por exemplo o aplicativo "Stat\Quality Tools\Capability Analysis\Normal" e solicitar os limites inferior e superior (Lower bound, Upper bound) no botão "Storage".
c) A fórmula (3) foi utilizada para construir os intervalos de confiança do Cp para diferentes valores de Cp e n.

Tabela 1 – Intervalos de confiança para diferentes valores de Cp e n

n	Cp = 1	Cp = 1,1	Cp = 1,2	Cp = 1,3	Cp = 1,4	Cp = 1,6	Cp = 1,8	Cp = 2,0
5	(0,35;1,67)	(0,38;1,84)	(0,42;2,00)	(0,45;2,17)	(0,49;2,34)	(0,56;2,67)	(0,63;3,00)	(0,70;3,34)
10	(0,55;1,45)	(0,60;1,60)	(0,66;1,74)	(0,71;1,89)	(0,77;2,04)	(0,88;2,33)	(0,99;2,62)	(1,10;2,91)
15	(0,63;1,37)	(0,70;1,50)	(0,76;1,64)	(0,82;1,78)	(0,89;1,91)	(1,01;2,19)	(1,14;2,46)	(1,27;2,73)
20	(0,68;1,31)	(0,75;1,45)	(0,82;1,58)	(0,89;1,71)	(0,96;1,84)	(1,10;2,10)	(1,23;2,37)	(1,37;2,63)
30	(0,74;1,26)	(0,82;1,38)	(0,89;1,51)	(0,97;1,63)	(1,04;1,76)	(1,19;2,01)	(1,34;2,26)	(1,49;2,51)
40	(0,78;1,22)	(0,86;1,34)	(0,93;1,46)	(1,01;1,59)	(1,09;1,71)	(1,25;1,95)	(1,40;2,20)	(1,56;2,44)
50	(0,80;1,20)	(0,88;1,32)	(0,96;1,44)	(1,04;1,56)	(1,12;1,68)	(1,28;1,92)	(1,44;2,15)	(1,60;2,39)
60	(0,82;1,18)	(0,90;1,30)	(0,98;1,42)	(1,07;1,53)	(1,15;1,65)	(1,31;1,89)	(1,48;2,12)	(1,64;2,36)
70	(0,83;1,17)	(0,92;1,28)	(1,00;1,40)	(1,08;1,52)	(1,17;1,63)	(1,33;1,87)	(1,50;2,10)	(1,67;2,33)
80	(0,84;1,16)	(0,93;1,27)	(1,01;1,39)	(1,10;1,50)	(1,18;1,62)	(1,35;1,85)	(1,52;2,08)	(1,69;2,31)
90	(0,85;1,15)	(0,94;1,26)	(1,02;1,38)	(1,11;1,49)	(1,19;1,61)	(1,37;1,83)	(1,54;2,06)	(1,71;2,29)
100	(0,86;1,14)	(0,95;1,25)	(1,03;1,37)	(1,12;1,48)	(1,21;1,59)	(1,38;1,82)	(1,55;2,05)	(1,72;2,28)
120	(0,87;1,13)	(0,96;1,24)	(1,05;1,35)	(1,13;1,46)	(1,22;1,58)	(1,40;1,80)	(1,57;2,03)	(1,75;2,25)
150	(0,89;1,11)	(0,98;1,22)	(1,06;1,34)	(1,15;1,45)	(1,24;1,56)	(1,42;1,78)	(1,60;2,00)	(1,77;2,23)
200	(0,90;1,10)	(0,99;1,21)	(1,08;1,32)	(1,17;1,43)	(1,26;1,54)	(1,44;1,76)	(1,62;1,98)	(1,80;2,20)

Exemplo 2: No exemplo 1 viu-se que com n = 86 se atinge um erro na estimativa de 0,15. Para o mesmo problema pode-se calcular a largura do intervalo de confiança (limite superior – limite inferior) para diferentes tamanhos de amostra. Estas larguras foram plotadas na Figura 4. Note que a partir do tamanho de amostra 100-120, a largura permanece praticamente inalterada, logo não existirá grande diferença entre a precisão da estimativa do Cp quando a amostra é de tamanho 100 ou de tamanho 200. Economicamente esta diferença pode ser muito grande.

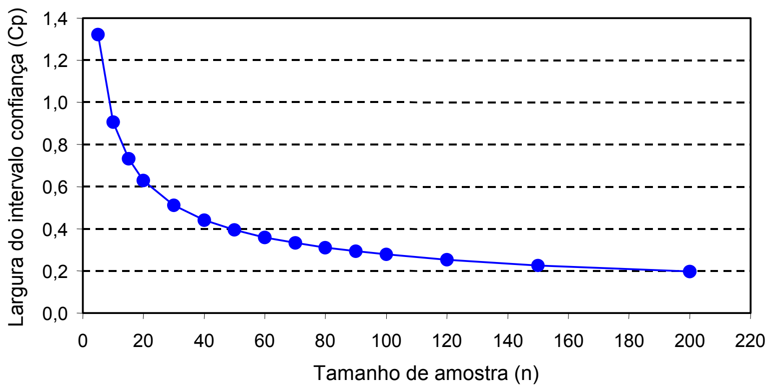

Figura 4 – Larguras dos intervalos de confiança em função de n (para Cp = 1)

Exemplo 3: Foi coletada uma amostra de tamanho 20 e encontrada uma estimativa de Cpk igual a 1,37. A um nível de confiança de 95%, o intervalo encontrado é (0,76;1,54). Isto significa que o verdadeiro valor de Cpk pode ser tão baixo quanto 0,76 (processo muito ruim) ou tão alto quanto 1,54 (processo muito bom!).

Exemplo 4: Suponha que você receba peças de um fornecedor externo, cujo processo deveria possuir, pela negociação acertada com ele, Cpk maior ou igual que 1,67 (solicitação comum entre as indústrias automotivas). É feita uma auditoria para verificar o desempenho do processo. Uma amostra de n = 100 peças coletadas ao longo de duas semanas fornece um Cpk = 1,37. Neste momento você poderia questionar: esta informação permite concluir que o Cpk real do processo do fabricante é maior que 1,67? Calculando o intervalo de confiança com a fórmula (4) você encontra (1,17;1,55), portanto há evidências estatísticas de que o Cpk deste processo é menor que 1,67 (pois o valor 1,67 não está contido no intervalo). O fornecedor deve fazer melhorias no processo.

Observações finais:

Este artigo pode ser uma ajuda valiosa para quem trabalha em qualidade e deve planejar e analisar estudos de capacidade, essenciais nos projetos de melhoria Seis Sigma. Esperamos que você tenha se convencido da escassa representatividade do cálculo de índices de capacidade com amostras pequenas. Em caso de você não poder utilizar tamanhos de amostra adequados, pelo menos pode quantificar qual é a variabilidade da sua estimativa. Em nosso próximo encontro, teremos novas aventuras de Nasco e Histo DOE. Até lá!

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

- Bothe, Davis R. (1997). Measuring Process Capability. New York: McGraw-Hill. ISBN: 0070066523.
- Bissel, A. F. (1990). How reliable is your capability index? Applied Statistics 39, p. 331-340.

Carlos Domenech e Luis Vinha são consultores da M. I. Domenech, empresa de métodos avançados e soluções Seis Sigma (HP: www.statistical.com.br). Se tiver comentários sobre o artigo por favor envie e-mail a mi.domenech@statistical.com.br.